Komplex 2.

1. Adja meg az alábbi komplex kifejezések értékét! Ahol tud, számoljon exponenciális alakban!

a, $z_1 = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$ → $\left(\frac{10i}{4+2i} - \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_3^3}\right)^{413} = ?$

b, $z_1 = -6 + 10i$, $z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$ → $\frac{\left(\overline{z_1} + z_2^8\right)^4}{i^{563}} = ?$

c, $z_1 = 3 - 8i$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ → $\frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{z_2^2} \cdot i^{63} = ?$

d, $z_1 = 4 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z_2 = 2\left(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ\right)$ → $\frac{z_2^8}{z_2^3 + \overline{z_1}^4} = ?$

e, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ → $\frac{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}{i^{222} \cdot z_1^3 \cdot z_2^5} = ?$

f, $z_1 = \sqrt{3} + 3i$, $z_2 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$ → $\frac{z_1^8}{i^9 \cdot z_2^2} + \overline{z_2} = ?$

g, $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ\right)$, $z_2 = \sqrt{12} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ → $\frac{i^{11} \cdot z_1}{z_2^6} - \frac{\overline{z_2}}{z_1^2} = ?$

2. Számolja ki az alábbi komplex számok megfelelő gyökeit exponenciális alakban és ábrázolja őket a komplex számsíkon!

a, $z = -3 - \sqrt{27}i$ $\quad \sqrt[4]{z} = ?$

b, $\sqrt[3]{-27} = ?$

c, $\sqrt[3]{8} = ?$

d, $z = 1 - \sqrt{3}i$ $\quad \sqrt[2]{z} = ?$

e, $z = -4 - 4i$ $\quad \sqrt[5]{z} = ?$

f, $\sqrt[3]{-8i} = ?$

g, Adja meg a hatodik egységgyököket, és mindegyik esetén döntse el, hogy milyen “n” esetén lesz primitív n-edik egységgyök!

h, Adja meg a hetedik egységgyököket, és mindegyik esetén döntse el, hogy milyen “n” esetén lesz primitív n-edik egységgyök!

i, Adja meg a nyolcadik egységgyököket, és mindegyik esetén döntse el, hogy milyen “n” esetén lesz primitív n-edik egységgyök!

j, Adja meg a kilencedik egységgyököket, és mindegyik esetén döntse el, hogy milyen “n” esetén lesz primitív n-edik egységgyök!

k, $\sqrt[5]{1} = ?$ Adja meg, hogy mely megoldások lesznek primitív 5. egységgyökök!

l, $\sqrt[8]{1} = ?$ Adja meg, hogy mely megoldások lesznek primitív 8. egységgyökök!

m, Adja meg a primitív 4. egységgyököket!

n, Adja meg a primitív 7. egységgyököket!

o, Igaz-e, hogy vannak primitív egységgyökök az $\frac{1}{2}\sqrt[4]{16i}$ komplex számok között?

p, Igaz-e, hogy vannak primitív egységgyökök az $\frac{1}{2}\sqrt[3]{8}$ komplex számok között?

3. A gyökök és együtthatók között összefüggés tetszőleges n-edfokú egyenlet esetén:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \qquad z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

a, Adja meg a $z^3 + z + 10 = 0$ egyenlet gyökeit, ha tudjuk, hogy az egyik gyöke a $z_1 = 1 - 2i$!

Megoldás. Valós együtthatós egyenletről van szó, s így a másik gyök: $z_2 = \overline{z_1} = 1 + 2i$.
A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, amiből $z_3 = -2$.

b, Mutassuk meg, hogy a $z^4 + z^3 + z - 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke $z_1 = i$. Adjuk meg az egyenlet másik három gyökét.

Megoldás. Helyettesítsük be *i*- t az egyenletbe. $i^4 + i^3 + i - 1 = 0$ Tehát $z_1 = i$ gyöke az egyenletnek.

Az egyenlet valós együtthatós, így a másik gyök $z_2 = \overline{z_1} = -i$ A gyökök és együtthatók közötti összefüggés: $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1$ és $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = -1$, így $z_3 + z_4 = -1$ és $z_3 \cdot z_4 = -1$

Ezt megoldva: $z_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ és $z_4 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

c, Mutassuk meg, hogy a $z^4 - 2z^3 - z^2 + 2z + 10 = 0$ egyenletnek gyöke a $z_1 = -1 + i$ Adjuk meg a többi három gyököt is.

Megoldás. $-1+i,\ -1-i,\ 2+i,\ 2-i$

d, Tudjuk, hogy a $z^2 + (1-i)z - 4 + 7i = 0$ egyenlet egyik gyöke $z_1 = 2 - i$
Keressük meg a másik gyököt.

Megoldás. Vigyázzunk, nem valós együtthatós egyenletről van szó, s így a másik gyök nem az első konujugáltja. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján: $z_1 + z_2 = -(1-i)$ és $z_1 \cdot z_2 = -4 + 7i$. Ebből kiszámolható, hogy $z_2 = -3 + 2i$

e, Tegyük fel hogy a $z^3 - 2z + k = 0$ egyenletnek gyöke a $z_1 = 1 + i$. Adjuk meg a másik két gyököt és a *k* valós konstans értékét.

Megoldás. Az egyenlet valós együtthatós, s így a másik gyök $z_2 = \overline{z_1} = 1 - i$
A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, amiből $z_3 = -2$
Másrészt $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -k$ és így $k = 4$.

f, Tudjuk, hogy a $z^3 - 3z^2 - 8z + 30 = 0$ egyenletnek gyöke a $z_1 = 3 + i$. Adjuk meg a többi gyököt.

Megoldás. $3+i,\ 3-i,\ -3$

g, Tudjuk, hogy a $4z^3 - 3z^2 + 16z - 12 = 0$ egyenletnek az egyik gyöke a $z_1 = 2i$. Keressük meg a másik két gyököt.

Megoldás. $2i,\ -2i,\ 3/4$

h, Tudjuk, hogy a $z^4 - 4z^3 + 12z^2 + 4z - 13 = 0$ egyenletnek az egyik gyöke a $z_1 = 2 + 3i$.
Számítsuk ki a többi három gyök értékét.

Megoldás. $1,\ -1,\ 2+3i,\ 2-3i$

i, A $z^2 + pz + q = 0$ egyenlet gyökei $1+i$ és $4+3i$. Adjuk meg a p *és* q komplex számok értékét!

Megoldás. A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján: $(1 + i) + (4 + 3i) = -p$ és $(1 + i)(4 + 3i) = q$. Ebből $p = -5 - 4i$ *és* $q = 1 + 7i$.

4. Szögfüggvények és komplex számok

a, Adjuk meg $\cos(3\mu)$-t $\cos\mu$-vel és $\sin(3\mu)$-t $\sin\mu$-val kifejezve!

Megoldás.
Induljunk ki a következő összefüggésből: $\cos(3\mu) + i\sin(3\mu) = (\cos\mu + i\sin\mu)^3$
Alakítsuk a jobb oldalt:
$(\cos\mu + i\sin\mu)^3 = \cos^3\mu + 3\cos^2\mu\ i\sin\mu + 3\cos\mu\ i^2\sin^2\mu + i^3\sin^3\mu =$
$= \cos^3\mu + 3\cos^2\mu\ i\sin\mu - 3\cos\mu\sin^2\mu - i\sin^3\mu$

A két oldal valós részeinek egyenlőségéből $\cos(3\mu) = \cos^3\mu - 3\cos\mu\sin^2\mu$.
A $\sin^2\mu = 1 - \cos^2\mu$ azonosság miatt $\cos(3\mu) = \cos^3\mu - 3\cos\mu(1 - \cos^2\mu) = 4\cos^3\mu - 3\cos\mu$.

A két oldal képzetes részeinek egyenlőségéből, valamint a $\cos^2\mu = 1 - \sin^2\mu$ azonosság alapján hasonlóan kapható, hogy $\sin(3\mu) = 3\cos^2\mu\sin\mu - \sin^3\mu = 3\sin\mu - 4\sin^3\mu$:

b, A $\cos(5\mu) + i\sin(5\mu) = (\cos\mu + i\sin\mu)^5$ összefüggés felhasználásával bizonyítsuk be, hogy $\cos(5\mu) = 16\cos^5\mu - 20\cos^3\mu + 5\cos\mu$!

Megoldás.
A binomiális tétel alapján: $(\cos\mu + i\sin\mu)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cos^k\mu\cdot(i\cdot\sin\mu)^{5-k}$
A két oldal valós részeinek egyenlőségéből $\cos(5\mu) = \cos^5\mu - 10\cos^3\mu\sin^2\mu + 5\cos\mu\sin^4\mu$
Ezt a $\sin^2\mu = 1 - \cos^2\mu$ *és a* $\sin^4\mu = (1 - \cos^2\mu)^2$ azonosságok segítségével átalakítva kapjuk a végeredményt: $\cos(5\mu) = 16\cos^5\mu - 20\cos^3\mu + 5\cos\mu$

c, Adja meg a $\sin 6x$, $\sin 7x$ és $\cos 8x$ kifejezések értékét a $\cos x$ és $\sin x$ segítségével kifejezve!

Megoldás.
$\sin 6x = 6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x$
$\sin 7x = 7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x$
$\cos 8x = \cos^8 x - 28\cos^6 x\sin^2 x + 70\cos^4 x\sin^4 x - 28\cos^2 x\sin^6 x + \sin^8 x$